Version française traduite. La version originale a été publiée en anglais

2025, Vol. 39, No. 3, 9-14

Revue Française de Gestion Industrielle

article en open accès sur www.rfgi.fr

https://doi.org/10.53102/2025.39.03.1251

ISSN: 0242-9780
eISSN: 2804-9284

Comment les prédicats peuvent faciliter la résolution de problèmes d'assignation se posant dans la chaîne logistique

Vincent Giard [1],

[1] *Université Paris-Dauphine, PSL Research University, Paris, France, vincent.giard@lamsade.dauphine.fr*

Résumé : Cet article méthodologique s'intéresse à la modélisation par programmation linéaire des problèmes d'assignation, à partir d'exemples de problèmes rencontrés dans la gestion de la chaîne d'approvisionnement. Il explore les possibilités offertes par les logiciels basés sur l'approche AML (Algebraic Modelling Language), qui permet l'utilisation de prédicats dans la formulation des problèmes, notamment pour restreindre le domaine d'existence de certaines variables. Les variables de décision binaires peuvent être utilisées pour résoudre des problèmes d'assignation en reliant des objets appartenant à différentes classes d'objets correspondant à différentes ressources ou à différents moments. Les contraintes du problème d'optimisation sont alors décomposées en contraintes intrinsèques à respecter lorsque le problème ne concerne qu'une seule décision (variable binaire unique) et en contraintes supplémentaires interdépendantes impliquant plusieurs décisions à prendre simultanément. Les contraintes intrinsèques, généralement gérées par des contraintes de modèle, peuvent être remplacées par des prédicats associés aux variables binaires, ce qui permet à la fois de supprimer des contraintes et de réduire considérablement l'espace d'existence des variables, facilitant ainsi grandement la recherche de solutions au problème numérique.

Mots clés : Algebraic Modelling Language (AML) ; Variables Binaires ; Prédicats ; Performance de résolution ; Problèmes d'Assignation ; Typologie des Contraintes

How predicates can improve solving supply chain assignment problems

Abstract: This methodological paper focuses on linear programming modelling of allocation problems, using examples of problems encountered in supply chain management. It explores the possibilities offered by software based on the AML approach (Algebraic Modelling Language), which allows the use of predicates in problem formulation, particularly to restrict the existence domain of certain variables. Binary decision variables can be used to solve assignment problems by linking objects belonging to different classes of objects corresponding to different resources or time. The constraints of the optimisation problem are then broken down into intrinsic constraints to be respected when the problem concerns only one decision (→ unique binary variable) and additional interdependent constraints involving several decisions to be made simultaneously. The intrinsic constraints, typically handled by model constraints, can be replaced by predicates associated with binary variables, allowing for both the removal of constraints and a significant reduction in the existence space of the variables, thereby greatly facilitating the solution finding of the numerical problem posed.

Citation: Giard, V. How predicates can improve solving supply chain assignment problems. *Revue Française de Gestion Industrielle*, 39(3), 09-14. https://doi.org/10.53102/2025.39.03.1251

Historique : reçu le 12/05/2025, accepté le 25/09/2025, en ligne le 26/09/2025

1. INTRODUCTION

Cet article se veut méthodologique, même s'il ne contient pas de revue de la littérature (qui est inexistante pour cette approche de modélisation générique qui pourrait réduire considérablement l'ampleur du problème à résoudre) ni de modèles ni d'études de cas (qui pourraient utiliser cette approche dans les conditions décrites ci-dessous).

Il suggère de remplacer les contraintes conditionnant l'existence de variables binaires dans un programme linéaire par des prédicats intégrant ces conditions dans la définition de ces variables, réduisant ainsi a priori leur domaine d'existence et limitant la taille du problème d'optimisation à résoudre, sans modifier la solution. La méthode habituelle consistant à utiliser des contraintes pour limiter le domaine de validité d'une variable nécessite des itérations dans le processus de résolution afin de forcer la variable à se conformer à ces contraintes. L'utilisation de prédicats permet d'éviter cela, car la recherche n'est effectuée que dans le domaine d'existence pertinent des variables, quelle que soit la méthode de résolution, indépendamment du prétraitement implicitement effectué par les prédicats.

Sans prétendre être exhaustif, il existe trois utilisations principales des variables de décision binaires dans les problèmes de gestion de la chaîne logistique, qui sont utilisées ici pour illustrer le domaine d'application de l'approche proposée, pouvant être utilisée dans de nombreux autres contextes.

- Dans le premier cas, les variables binaires sont utilisées pour décrire des choix concernant plusieurs décisions alternatives à prendre, en subordonnant leur réalisation à des conditions logiques. Une variable binaire ne contient généralement qu'un seul indice correspondant à un numéro de décision simple, et le modèle créé comprend généralement un ensemble de conditions d'existence reliant ces choix (incompatibilité, réalisation conditionnelle, inclusion, etc.) via des relations reliant ces variables binaires ; la littérature scientifique et commerciale répertorie ces conditions logiques (par exemple, FICO, 2017). Ce cas est illustré par le problème classique de la sélection d'investissements dans le cadre de contraintes budgétaires ou de problèmes de planification qui ne prennent pas en compte plus d'une ressource partagée par les activités.

- Dans le second cas, des variables de décision binaires sont utilisées pour ajouter temporairement des ressources supplémentaires à celles déjà engagées dans le problème à résoudre.

- Dans le troisième cas, des variables de décision binaires sont utilisées pour résoudre des problèmes d'affectation qui relient des objets appartenant à différentes classes (au sens large) correspondant à des ressources (personnes, machines, hangars, usines, postes d'amarrage, etc.), ainsi qu'au temps.

Cet article se focalise sur le troisième cas et, accessoirement, sur le deuxième afin de montrer comment l'utilisation de prédicats peut réduire considérablement les domaines d'existence des variables de décision binaires. Pour obtenir cette réduction, le problème doit être formulé dans un logiciel d'optimisation basé sur les principes de l'approche AML (Algebraic Modelling Language) (Fourier, 2013). Le logiciel basé sur l'AML (par exemple, Xpress ou GAMS) combine une description générique du problème, qui est étroitement alignée sur sa formulation mathématique, et un ensemble de données pour créer une instance du problème à résoudre. Cette description générique, indépendante des données, peut mobiliser des prédicats dans des opérateurs algébriques (Σ, Π) et des quantificateurs universels ($\forall$), qui utilisent des paramètres de l'ensemble de données dans la création de l'instance. L'instance créée correspond à l'ensemble exact des relations des problèmes à optimiser, ces relations intégrant uniquement les variables et les valeurs de paramètre pertinentes pour le problème spécifique à résoudre.

Les problèmes d'affectation relient des éléments appartenant à deux ensembles (par exemple, des navires et des postes d'amarrage, ou des ordres de fabrication et des lignes de production) ou plus (par exemple, des navires, des postes d'amarrage et des périodes). Chaque variable de décision binaire dans les problèmes d'affectation correspond à une décision élémentaire, affectant une entité d'un ensemble (par exemple, navire, commande) à une entité d'un autre ensemble (par exemple, poste d'amarrage, chaîne de production), et est soumise à deux types de contraintes.

- Les *contraintes intrinsèques* de la variable binaire limitent les possibilités d'un problème d'affectation impliquant une seule décision (par exemple, un problème avec un seul navire dont les positions et dates d'accostage sont restreintes), ce qui implique un problème avec une seule variable binaire.
- Outre les contraintes intrinsèques, des *contraintes interdépendantes* apparaissent dans un problème d'affectation impliquant plusieurs décisions (par exemple, l'accostage d'un ensemble de navires ou la production d'un ensemble de commandes), ce qui implique un problème avec plusieurs variables binaires. Dans ce dernier cas, les décisions sont interdépendantes car elles peuvent entrer en concurrence pour l'utilisation de ressources à capacité limitée.

La formulation classique du problème prend en compte les contraintes intrinsèques à travers des relations dans le programme mathématique. La formulation basée sur l'approche AML évite de créer ces relations en associant des prédicats aux variables binaires dans toutes les relations qui utilisent ces variables, ce qui produit le même effet que ces contraintes et restreint a priori le domaine d'existence de ces variables binaires. Cette approche limite alors le nombre de relations utilisées par le modèle et réduit le temps de résolution, car la recherche de l'optimum est effectuée sur le seul domaine d'existence possible de la variable binaire, plutôt que sur le domaine défini par le produit cartésien des cardinalités des indices. Il convient de noter que cette approche élimine souvent la nécessité de développer des algorithmes spécialisés pour résoudre des problèmes d'une certaine complexité. Cette réduction, qui peut être drastique, est illustrée dans Bouzekri et al. (2021, 2022, 2023).

La section 2 décrit deux contextes de modélisation qui se présentent dans les problèmes d'affectation et compare les formulations qui utilisent des prédicats et celles qui n'en utilisent pas. Dans la section 3, un exemple tiré de la modélisation de la gestion portuaire (Bouzekri et al., 2023), basé sur des données réelles, est utilisé pour illustrer l'importance de la réduction a priori du domaine d'existence de l'une des variables de décision dans ce modèle. Une conclusion est proposée dans la section 4.

2. FORMULATIONS AVEC ET SANS PREDICATS DANS LA FORMULATION DE PROBLEMES D'AFFECTATION

Nous commencerons par présenter un exemple illustrant le passage d'une formulation sans prédicat à une formulation qui en utilise (section 2.1). Il convient alors de distinguer les cas où le déplacement n'est pas explicitement introduit dans le problème d'affectation (section 2.2) de ceux où il doit être pris en compte (section 2.3).

We will begin by presenting an example used to illustrate the passage from a formulation without a predicate to one that uses them (Section 2.1). A distinction must be made between cases where displacement is not explicitly involved in the assignment problem (Section 2.2) and those where it must be considered (Section 2.3).

2.1 **Exemple illustrant la transformation de la formulation du problème d'affectation**

Une variable binaire comporte autant d'indices qu'il y a d'ensembles d'objets dans le problème d'affectation, par exemple « navire $v \wedge$ poste d'accostage $b \wedge$ période t », dans un problème simplifié de gestion portuaire. Dans cet exemple, il existe $V \times B \times T$ variables binaires possibles pour un problème avec V navires, B postes d'accostage et T périodes. Plusieurs *attributs* peuvent caractériser chaque élément d'un ensemble. Par exemple, l'élément « navire v » peut avoir 3 attributs : sa longueur l_v, son tirant d'eau chargé d_v et son heure d'arrivée au plus tôt A_v ; et l'élément « poste d'accostage p » peut avoir deux attributs : sa longueur L_p et sa profondeur D_p. L'un de ces ensembles est privilégié dans la perspective retenue dans le problème d'affectation (dans notre exemple, il s'agit du navire) et définissent les *entitéss* du problème.

2.2 Cas du déplacement ignoré dans le problème d'affectation

Après avoir présenté la solution classique basée sur l'introduction de contraintes explicites à l'aide d'un exemple, nous examinerons la solution fondée sur les prédicats. Nous présenterons ensuite d'autres exemples d'utilisation intéressante des prédicats pour les variables de décision binaires dans lesquelles le temps est utilisé comme indice.

2.2.1 Formulation Classique basée sur l'usage de contraintes

Dans notre exemple, certaines contraintes intrinsèques portant sur une variable binaire doivent être prises en compte, interdisant certaines combinaisons entre des valeurs spécifiques d'attributs de chaque ensemble mobilisé dans la variable binaire multidimensionnelle : *i*) le navire *v* ne peut accoster au poste d'accostage *b* que si son tirant d'eau chargé d_v est inférieur à la profondeur D_b de ce poste et si sa longueur l_v ne dépasse pas la longueur L_b du poste d'accostage ; *ii*) le navire *v* ne peut accoster avant son arrivée au port A_v. Ces trois contraintes intrinsèques sont traditionnellement traitées par les trois relations suivantes : $\left[\sum_t \mathrm{d}_v \cdot x_{vbt} \le \mathrm{D}_b, \forall v, b\right]$; $\left[\sum_t \mathrm{l}_v \cdot x_{vbt} \le \mathrm{L}_p, \forall v, b\right]$ et $\left[\sum_b t \cdot x_{vbt} \ge \mathrm{A}_v, \forall v\right]$.

Par ailleurs, tous les navires doivent accoster dans le port $\left[\sum_{bt} x_{vbt} = 1, \forall v\right]$, mais cette contrainte temporelle ne relie pas deux attributs de deux ensembles et ne peut donc pas être considérée comme intrinsèque.

L'introduction de ces contraintes qui, dans l'approche classique, ont pour conséquence de restreindre progressivement l'espace de recherche dans la résolution du problème, n'est pas nécessaire avec les prédicats lorsque l'on utilise un logiciel basé sur l'AML et simplifie la résolution numérique du problème.

2.2.2 Formulation basée sur l'usage des predicats

Le prédicat conditionnant l'existence de la variable x_{vpt}, prenant en compte les mêmes contraintes, est $\left[\mathrm{d}_v \le \mathrm{D}_b \wedge \mathrm{l}_v \le \mathrm{L}_b \wedge t \ge \mathrm{A}_v\right]$. Implicitement, cette expression logique doit être « vraie » pour que x_{vbt} soit pris en compte dans le problème, écartant les autres x_{vbt} pour lesquels la valeur du prédicat est « fausse ». Avec la barre verticale (|) utilisée pour indiquer une restriction, la contrainte imposant au navire *v* d'accoster devient $\left[\sum_{bt|\mathrm{d}_v \le \mathrm{D}_b \wedge \mathrm{l}_v \le \mathrm{L}_b \wedge t \ge \mathrm{A}_v} x_{vbt} = 1, \forall v\right]$ et les 3 contraintes introduites dans la section précédente sont inutiles et peuvent être écartées.

Lors de l'utilisation de prédicats, il est important de noter que dans chaque relation impliquant la variable x_{vbt}, le prédicat conditionnant son existence doit être utilisé.

2.2.3 Contraintes temporelles specifiques

Des contraintes temporelles supplémentaires peuvent être introduites dans un problème pour un sous-ensemble de toute ressource désignée dans la variable binaire (navires et postes d'accostage, dans notre exemple). Ce cas est illustré ci-dessous.

- L'entrée dans le port via un chenal d'accès (ressource implicite) peut n'être possible qu'à marée haute pour certains navires lourdement chargés. Cette interdiction est contrôlée par le paramètre booléen O_{vt}, qui vaut 1 à marée haute pour les navires concernés par la restriction liée à la marée et 0 dans les autres cas. Pour les navires non concernés par la restriction liée à la marée, ce paramètre vaut toujours 1. Cette contrainte temporelle supplémentaire est prise en compte en ajoutant « $\mathrm{O}_{vt} = 1$ » au prédicat précédent, ce qui conduit à la mise à jour suivante du prédicat : $\left[\sum_{bt|\mathrm{d}_v \le \mathrm{D}_b \wedge \mathrm{l}_v \le \mathrm{L}_b \wedge t \ge \mathrm{A}_v \wedge \mathrm{O}_{vt}=1} x_{vbt} = 1, \forall v\right]$.
- Ce type de contrainte spécifique introduite pour un navire peut être immédiatement étendue à toute ressource repérée par la variable binaire, ce qui permet, par exemple, d'interdire l'accostage au poste d'accostage *p* pendant certaines périodes en raison d'une maintenance programmée, de mauvaises conditions météorologiques ou de l'indisponibilité temporaire de certains équipements. Cela conduit à utiliser le paramètre booléen O'_{bt} et à remplacer $\mathrm{O}_{vt} = 1$ par $\mathrm{O}'_{bt} = 1$ dans le prédicat précédent.

- De toute évidence, le prédicat peut prendre en compte simultanément ces différentes contraintes , ce qui donne: $\left[\sum_{bt|d_v \le D_b \wedge l_v \le L_b \wedge t \ge A_v \wedge O_{vt}=1 \wedge O'_{bt}=1} x_{vbt} = 1, \forall v\right]$.

2.3 Cas du déplacement pris en compte dans le problème d'affectation.

Dans l'exemple présenté dans la section précédente, l'affectation d'un navire à un poste d'amarrage n'a pas tenu compte du trajet du navire pour accoster à ce poste.

Dans certains problèmes d'affectation, la distance (et donc le temps ou le coût de transport) doit être prise en compte. Par exemple, le trajet doit être pris en compte lorsqu'un entrepôt *i* est affecté à une usine ou à une plateforme de distribution *j*, qui lui fournit exclusivement un volume spécifique de produits. $\left[H_{ij} \cdot x_{ij} \le K, \forall i, j\right]$ Ce transport doit tenir compte du tableau des distances H_{ij} pour éviter des livraisons trop distantes (une distance maximale de K kilomètres étant utilisée). Par conséquent, le hangar *i* doit nécessairement être attribué à une usine *j* par la relation (1) $\left[\sum_j x_{ij} = 1, \forall i\right]$, et la contrainte de distance peut être prise en compte par la relation (2) $\left[H_{ij} \cdot x_{ij} \le K, \forall i, j\right]$. Cette contrainte intrinsèque peut être prise en compte par le prédicat $H_{ij} \le K$ à introduire dans la relation (1) , rendant inutile la création de la relation (2). En outre, il convient de tenir compte des contraintes interdépendantes, telles que la non-saturation de la capacité de l'entrepôt ou de l'usine de production, qui doivent toutes utiliser ce prédicat intrinsèque de la variable x_{ij} .

Notons enfin que certains problèmes d'affectation concernent non seulement l'affectation d'un objet, mais aussi sa taille, ce qui conduit à des variables continues (ou discrètes), rendant l'utilisation des prédicats particulièrement intéressante. Dans le dernier exemple, la variable x_{ij} devient continue et correspond au volume produit par l'usine *j* pour l'entrepôt *i*, dont la demande totale est x_{ij} , et la relation $\left[\sum_{j|D_{ij} \le K} x_{ij} = 1, \forall i\right]$ devient $\left[\sum_{i|D_{ij} \le K} x_{ij} = D_j, \forall j\right]$ dans laquelle plusieurs usines peuvent approvisionner un entrepôt.

3. ILLUSTRATION

Cet exemple est tiré de l' article *Integrated laycan and berth allocation problem with ship stability and conveyor routing constraints in bulk port*, publié par *Computer And Industrial Engineering*, On s'intéresse ici à la première x_{vpt} des six variables de décision de ce modèle, égale à 1 si le navire *v* ($v \in \mathscr{V}$) commence à accoster à la position d'accostage *p* ($p \in \mathscr{P}$) pendant la période *t* ($t \in \mathscr{T}$), et à 0 dans le cas contraire. Dans ce modèle, l'existence de la variable de décision x_{vpt} est soumise à sept conditions. Par souci de simplicité, seules les quatre premières seront relatées ici, car les trois contraintes suivantes (passage du chenal à marée haute d'un navire chargé quittant le port, accostage pendant certaines périodes de travail et diminution progressive des périodes d'accostage possibles dans le temps) sont plus compliquées à décrire sans entrer dans les détails du modèle.

- La longueur l_v du navire *v* ne doit pas dépasser la longueur L_b de la position d'accostage *b* → $\lambda_v \le Q_p$.
- Le tirant d'eau d_v du navire *v* ne doit pas dépasser la profondeur D_b de la position d'accostage p → $d_v \le D_b$.
- Le navire *v* doit pouvoir accoster à la position d'accostage *p*. Cette contrainte d'accostage supplémentaire peut être permanente (type d’équipement) ou temporaire en raison de conditions météorologiques difficiles (houle, tempêtes, etc.). Cette interdiction est basée sur le paramètre booléen N_{vp} , qui ne vaut 1 que si l'accostage est possible
- Le navire *v* ne peut accoster qu'après son heure d'arrivée prévue A_v , sans dépasser son temps d'attente maximal I_v dans le port → $A_v \le t \le A_v + I_v$

Dans un modèle classique de programmation linéaire, ces 4 conditions doivent être prises en compte par 5 contraintes, qui deviennent inutiles si le domaine d'existence de la variable x_{vbt} est restreint par le prédicat. $N_{vp} = 1 \wedge l_v \leq L_b \wedge d_v \leq D_b \wedge A_v \leq t \leq A_v + l_v$

Dans l'étude de cas présentée dans l'article précité, le nombre de périodes est $T = 840$ heures, le nombre de navires est $N = 16$ et le nombre de postes d'accostage est $B = 10$, ce qui implique $840 \times 16 \times 10 = 143.400$ variables binaires. Avec environ 50 % des postes d'amarrage accessibles à ces navires et tous devant accoster dans les 3 jours ($\rightarrow$72/840= 8,6 % des périodes offertes), le nombre de variables binaires possibles dans ce problème tombe à environ 6.200. Notez que ce nombre diminue encore lorsque les trois contraintes ignorées sont prises en compte.

Un exemple d'utilisation de ces prédicats est donné par la première relation du modèle, qui contraint le navire *v* à accoster à un seul poste d'amarrage *p* et à une seule date *t*. Comme indiqué précédemment, ces prédicats doivent être utilisés pour chaque instance de la variable dans toutes les relations du modèle :

$$\sum_{b \in \mathscr{B} | N_{vb} = 1 \wedge l_v \leq L_b \wedge d_v \leq D_b} \sum_{t \in \mathscr{T} | A_v \leq t \leq A_v + l_v} x_{vbt} = 1, \forall v \in \mathscr{V}$$

4. CONCLUSION

L'utilisation de prédicats dans les problèmes d'optimisation avec des variables de décision binaires gérées par un logiciel basé sur l'AML peut réduire considérablement la taille du problème posé et éviter d'avoir à créer des algorithmes de résolution spécifiques. De plus, en facilitant la résolution de problèmes complexes, les chercheurs peuvent prendre en compte de manière plus réaliste un certain nombre de contraintes du problème posé sur le terrain (telles que l'utilisation simultanée d'une granularité temporelle fine pour modéliser le fonctionnement du système et d'un intervalle séparant deux décisions datées possibles augmentant en se rapprochant de l'horizon du problème), souvent ignorées en raison de l'impossibilité de trouver une solution numériquement. Il convient de noter enfin que les principes décrits dans cet article (identification des contraintes intrinsèques) peuvent être facilement adaptés à d'autres catégories de problèmes d'optimisation utilisant des variables binaires dans n'importe quel logiciel d'optimisation basé sur l'AML.

5. BIBLIOGRAPHY

Bouzekri,H., Alpan, G. & Giard, V. (2022), An integrated Decision Support System for planning production, storage and bulk port operations in a fertiliser supply chain, International Journal of Production Economics, vol. 252, 108561, https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2022.108561

Bouzekri,H., Alpan, G. & Giard, V. (2021) Integrated Laycan and Berth Allocation and time-invariant Quay Crane Assignment Problem in tidal ports with multiple quays. European Journal of Operational Research, 293 (3), 892-909. https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109341

Bouzekri,H., Alpan, G. & Giard, V.(2023) Integrated laycan and berth allocation problem with ship stability and conveyor routing constraints in bulk ports Computers & Industrial Engineering. 181 (2023) 109341 https://doi.org/10.1016/j.cie.2023.109341

FICO (2017) *MIP formulations and linearisation*. https://msi-jp.com/xpress/learning/square/10-mipformref.pdf

Fourer, R. (2013) Algebraic modeling languages for optimisation, S.I. Gass, M.C. Fu (Eds.), *Encyclopedia of Operations Research and Management Science*, Springer, Boston, MA, https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1153-7_25

6. BIOGRAPHY

Vincent Giard is Professor Emeritus at 'Paris-Dauphine, PSL Research University' (http://www.dauphine.fr) and affiliated with the UMR 'LAMSADE' (http://www.lamsade.dauphine.fr). He is a specialist in supply chain management. He has authored or co-authored a dozen books and published around a hundred articles. His Website is http://www.lamsade.dauphine.fr/~giard/

[1]*Vincent Giard, Université Paris-Dauphine, PSL Research University, Paris, France,*
vincent.giard@lamsade.dauphine.fr
iD : *https://orcid.org/0000-0003-4818-8279*